

## Φιλλάδιο 7

1. Θεωρούμε το σύστημα

$$\frac{dx}{dt} = x + ay,$$

$$\frac{dy}{dt} = x - 2y.$$

Για ποιές τιμές του  $a \in \mathbf{R}$  το σημείου ισορροπίας είναι

- α.) ασυμπτωτικά ευσταθές,
- β.) ευσταθές (όχι όμως ασυμπτωτικά),
- γ.) ασταθές.

2. Εξετάστε την ευστάθεια της λύσης  $(x, y) = (2, 1)$  για το σύστημα:

$$\frac{dx}{dt} = x - 2y,$$

$$\frac{dy}{dt} = 3x - 4y - 2.$$

Εξετάστε την ευστάθεια του σημείου ισορροπίας:

3.

$$\frac{dx}{dt} = x + \cos x - \sin y - 1,$$

$$\frac{dy}{dt} = e^x + e^y - 2.$$

4.

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = \sin x.$$

5.

$$\frac{dx}{dt} = x + e^{tx} - tx + t(x^2 - y^2),$$

$$\frac{dy}{dt} = xy + y + x^2y^2.$$

6.

$$\frac{dx}{dt} = -x + t \cos x + y - t,$$

$$\frac{dy}{dt} = x^2 - y.$$

7. Θεωρούμε το εξής σύστημα

$$x' = y + x^3 \cos(x^2 + y^2)$$

$$y' = -x + y^3 \cos(x^2 + y^2).$$

Διαπιστώστε ότι το Θεώρημα 3.1 δεν δίνει απάντηση σχετικά την ευστάθεια ή αστάθεια του σημείου  $(0, 0)$ .

8. Εξετάστε την ευστάθεια της μηδενικής λύσης της εξίσωσης

$$x'' + x' \sin x - x = 0.$$

**Φιλλάδιο 8**

Εξετάστε την ευστάθεια του σημείου ισορροπίας για τα ακόλουθα συστήματα :

1.

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -e^t x - t^2 y, \\ \frac{dy}{dt} &= t^2 x - y.\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -2x, \\ \frac{dy}{dt} &= -2y + 2z^2 \sin y \cos y, \\ \frac{dz}{dt} &= -2z \cos^2 y\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -2x, \\ \frac{dy}{dt} &= -2y - 3z^2 \sin y \cos x, \\ \frac{dz}{dt} &= -2z \sin^2 y.\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= x^5 + y^3, \\ \frac{dy}{dt} &= x^3 + y^5.\end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned}x' &= y + x^3 \cos(x^2 + y^2) \\ y' &= -x + y^3 \cos(x^2 + y^2).\end{aligned}$$

6. Εξετάστε την ευστάθεια του σημείου ισορροπίας για την εξίσωση (μαθηματικό εκκρεμές με απόσβεση)

$$x'' + \alpha x' + \beta \sin x = 0, \quad \alpha, \beta \geq 0 \text{ σταθερές.}$$